MEMORÁNDUM DE TEORÍAS DE PRIMER ORDEN

LENGUAJES, SEMÁNTICA Y TEORÍAS DE PRIMER ORDEN

Lenguaje, L, de primer orden

Símbolos lógicos: variables, =, $\neg$, $\vee$, $\exists$; **Símbolos no lógicos**: símbolos, f, de función n-aria, símbolos, p, de predicado n-ario (las constantes son símbolos de función 0-aria)

Términos: (a) variables; (b) $fa_1a_2 \ldots a_n$ (a_i términos)

Fórmulas: (a) atómicas, $pa_1a_2 \ldots a_n$ (a_i términos); (b) $\neg A$, $\vee AB$, $\exists x\, A$ (A, B fórmulas)

Símbolos derivados $A \to B$: $\neg A \vee B$; $A \wedge B$: $\neg(A \to \neg B)$; $A \leftrightarrow B$: $(A \to B) \wedge (B \to A)$; $\forall \mathbf{x}\, A$: $\neg\exists x\, \neg A$

Variable(**libre**) **ligada** en fórmula A: (no) aparece en una parte de A de la forma$\exists x$ B

$b_x[a]$ (**$A_x[a]$**) es la expresión obtenida al substituir las estancias (libres) de x por el término **a**

Estructura, M, para L consta de

(i) |M| “universo de M” (No vacío. Sus elementos se llaman *individuos* de M);

(ii) una función n-aria, f_M, por cada símbolo de función, f, de L;

(iii) un predicado n-ario, p_M, por cada símbolo de predicado, p, de L

L(M) es L más todos los nombres (constantes nuevas y distintas) de los individuos de M

Individuo, M(a), asociado a un término sin variables, a, de L(M)

(a) si a es un nombre, M(a) es el individuo cuyo nombre es a

(b) si a es $fa_1a_2 \ldots a_n$, M(a) es f_M $(M(a_1), M(a_2), \ldots, M(a_n))$

Valor de verdad, M(A), de una fórmula **cerrada** (sin variables libres), A, de L(M)

(a) si A es **atómica**, $pa_1a_2 \ldots a_n$, M(A) es p_M $(M(a_1), M(a_2), \ldots, M(a_n))$

(b) si A es **$\neg$B**, M(A) es V si y sólo si M(B) es F

si A es **B$\vee$C, B$\to$C, B$\wedge$C y B$\leftrightarrow$C**, M(A) se lee en la siguiente tabla

M(B)	M(C)	M(B $\vee$ C)	M(B $\to$ C)	M(B $\wedge$ C)	M(B $\leftrightarrow$ C)
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V

si A es **$\exists$x B**, M(A) es V si y sólo si $M(B_x[i])$ es V para algún nombre, i, de L(M) y

si A es **$\forall$x B**, M($\forall$x B) = V si y sólo si $M(B_x[i])$ es V para todo nombre, i, de L(M)

Una **M-instancia** de A es una fórmula cerrada, de L(M), de la forma A $_{x_1, x_2, \ldots, x_n}[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ con i_j nombres de L(M). Las M-instancias de una fórmula cerrada coinciden con la propia fórmula

A es **válida en M** si y sólo si para toda M-instancia, A', de A, M(A') = V

A, de L, es **válida (lógicamente)** si es válida en toda estructura M para L

A, de L, es **consecuencia lógica** del conjunto de fórmulas Γ si es válida en toda estructura M para L en la cual todas las fórmulas de Γ sean válidas

Axiomas lógicos:

$\neg A \vee A$ (proposicional) $\qquad A_x[a] \to \exists x\, A$ (substitución) $\qquad x = x$ (identidad)

$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \ldots \to x_n = y_n \to fx_1x_2 \ldots x_n = fy_1y_2 \ldots y_n$ *y también*

$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \ldots \to x_n = y_n \to px_1x_2 \ldots x_n \to py_1y_2 \ldots y_n$ (igualdad)

Reglas lógicas: $\dfrac{A}{B \vee A}$ *expansión* $\qquad \dfrac{A \vee A}{A}$ *contracción* $\qquad \dfrac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$ *asociativa* $\qquad \dfrac{A \vee B,\ \neg A \vee C}{B \vee C}$ *corte*

$\dfrac{A \to B,\ x \text{ no libre en } B}{\exists x\, A \to B}$ *introducción del $\exists$*

Una **teoría de primer orden** T es un sistema formal T tal que

(i) el lenguaje de T, L(T), es un lenguaje de primer orden

(ii) los axiomas de T son los axiomas lógicos y, posiblemente, algunas otras fórmulas (axiomas no lógicos) (iii) las reglas de T son las reglas lógicas

Teorema de una teoría de primer orden T (T $\vdash$ A se lee "A es un teorema de T")

(a) los axiomas de T son teoremas de T

(b) si las hipótesis de una regla son teoremas de T, la conclusión es teorema de T

(c) sólo son teoremas de T las fórmulas que verifican (a) o (b)

Prueba o demostración en T: sucesión finita de fórmulas que o bien son axiomas o bien son conclusiones de reglas cuyas hipótesis son fórmulas anteriores de la prueba

T $\vdash$ A si y sólo si A es la última fórmula de una **prueba**

Modelo para T es una estructura para L(T) en la que son válidos los axiomas no lógicos de T

A es **válida en T** si y sólo si es válida en todos los modelos de T. Se escribe T $\models$ A

Teorema de **validez**: Si T |— A, entonces T |= A. Teorema de **completud:** T |— A, si y sólo si T |= A.
Contraejemplo, o contramodelo, de T |— A es un modelo de T en el que A no es válida.

EL TEOREMA DE TAUTOLOGÍA

A, de L(T), es **elemental** si es atómica o de la forma $\exists x$ B
Una **valoración** para T es una aplicación, v, que a toda fórmula A de L(T) hace corresponder un valor v(A) que es V ó F según la siguiente definición:
(a) para cada fórmula elemental, A, v(A) se fija arbitrariamente
(b) si A es $\neg$B, v(A) es V si y sólo si v(B) es F; si A es B $\vee$ C, v(A) es F si y sólo si v(B) = v(C) = F
Formalmente, las tablas obtenidas para $\vee$, $\rightarrow$, $\wedge$ y $\leftrightarrow$ son las mismas que las de M(A) para una estructura M, pero **una valoración no es una estructura**
B es **consecuencia tautológica** de $A_1, A_2, ..., A_n$ si v(B) = V para toda valoración v tal que $v(A_1) = ... = v(A_n)$ = V. A es una **tautología** si v(A) = V para toda valoración v, es decir, si es consecuencia tautológica del conjunto vacío de fórmulas. Se prueba que B es consecuencia tautológica de $A_1, A_2, ..., A_n$ si y sólo si $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow B$ es una tautología
Teorema de **tautología**: (dos formas equivalentes)
(1ª forma) Si B es consecuencia tautológica de teoremas de T, entonces B es teorema de T
(2ª forma) Si B es tautología, entonces B es teorema de cualquier T
Nueva definición, equivalente a las anteriores, de **teorema** (en todos los casos, "de una teoría T")
(i) todo axioma de substitución, identidad, igualdad o no lógico es un teorema
(ii) si B es consecuencia tautológica de $A_1, A_2, ..., A_n$ y $A_1, A_2, ..., A_n$ son teoremas, B es teorema
(iii) si A es un teorema y B se puede deducir de A por la regla de introducción del $\exists$, B es un teorema

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE TAUTOLOGÍA

A' es una **instancia** de A si se obtiene substituyendo algunas variables libres de A por términos.
Reglas derivadas.

$\dfrac{A \rightarrow B,\ x \text{ no libre en } A}{A \rightarrow \forall x\, B}$	$\dfrac{A}{\forall x\, A}$	$\dfrac{A}{A', \text{ instancia de } A}$	$\dfrac{A \rightarrow B}{\forall xA \rightarrow \forall xB}$	$\dfrac{A \rightarrow B}{\exists xA \rightarrow \exists xB}$
introducción del $\forall$	*generalización*	*substitución*	*distribución*	

Teorema de **substitución**: T |— $A_{x1,x2,...,xn}[a_1 a_2 ... a_n] \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n A$ *y también*
T |— $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n A \rightarrow A_{x1,x2,...,xn} [a_1 a_2 ... a_n]$
A' es el **cierre** de A si tiene la forma $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n A$ donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables libres de A en orden alfabético.
Teorema del cierre: Si A' es el cierre de A, T |— A si y sólo si T |— A'.
Corolario: A es válida en una estructura M si y sólo si A' es válida en M.
Teorema de **deducción**: Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son cerradas,
$T[A_1, A_2, ..., A_n]$ |— B si y sólo si T |— $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow B$.
Teorema sobre **constantes**: Si T' se obtiene de T por adición de constantes, y no axiomas, nuevos
T |— A si y sólo si T' |— $A_{x1,x2,...,xn} [e_1, e_2, ..., e_n]$. *$e_i$ nuevas*
A' es una **variante** de A si se obtiene por una sucesión de substituciones de una parte de A de la forma $\exists x$ B por $\exists y\, B_x[y]$, y no libre en B
Teorema de la **variante**: Si A' es una variante de A, T |— A$\leftrightarrow$A'
A está en **forma prenex** si es de la forma $Qx_1 Qx_2 ... Qx_n B$, donde las Q son cuantificadores y B, en cambio. no contiene cuantificadores. Son **operaciones prenex** las que consisten en reemplazar una parte de una fórmula, A, de alguna de las formas siguientes:
a) $\exists x$ B por $\exists y\, B_x[y]$ ("variante" de $\exists x$ B),**y** no libre en B
b) $\neg Qx$ B por $Q'x \neg B$
c) Qx B $\vee$ C por Qx (B $\vee$ C), si x no libre en C
d) B $\vee$ Qx C por Qx (B $\vee$ C), si x no libre en B
e) QxB$\rightarrow$C por Q'x (B $\rightarrow$C), si x no libre en C
f) B $\rightarrow$ QxC por Qx (B $\rightarrow$C), si x no libre en B
g) QxB $\wedge$ C por Qx (B $\wedge$ C), si x no libre en C
h) B $\wedge$ Qx C por Qx(B $\wedge$ C), si x no libre en B
(Q' es $\forall$ si Q es $\exists$ y Q' es $\exists$ si Q es $\forall$).
Si A' se obtiene de A por operaciones prenex, entonces T |— A$\leftrightarrow$A' y, dada A, siempre se puede obtener una A' como la anterior y que está en forma prenex.

Demostración por **reducción al absurdo**. *Definición*: T es **inconsistente** si T |— A, para toda A o, equivalentemente, T |— B y T |— $\neg$B para cierta B. *Corolario del teorema de reducción para consistencia*: si A' es el cierre de A, **T |— A $\Leftrightarrow$ T[$\neg$ A'] es inconsistente.**